Отдельный оттиск из сборника:
«**ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ»**, Труды симпозиума, Бюракан, 26—30 октября 1981 г., Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1989, 521 с.

В. А. АМБАРЦУМЯН

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ И ЕГО НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ

О ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ И ЕГО НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ

В. А. АМБАРЦУМЯН

В 1941 г., после начала Великой Отечественной войны, часть Ленинградского университета, в котором работал и я, была эвакуирована в г. Елабугу. Там мы были свободны от лекций и поэтому имели возможность отдавать все свое время научно-исследовательской работе. Почти сразу после приезда в Елабугу был организован семинар, на котором докладывались работы сотрудников филиала Ленинградского университета по математической и теоретической физике. Участниками семинара были академики В. А. Фок и В. И. Смирнов, активное участие принимал тогда еще молодой астрофизик, ныне чл.-кор. АН СССР, В. В. Соболев*. Поздней осенью 1941 г. мною был сделан доклад по проблеме рассеяния света в плоскопараллельной среде. В этой работе был применен способ решения задачи, основанный на принципе, который в дальнейших наших работах получил название принципа инвариантности (ПИ).

О принципе инвариантности. Отличие ПИ от применявшихся прежде методов заключается в том, что он рассматривает свойства сред как цельных объектов. Между тем в прежних работах использовались уравнения, относящиеся к локальным процессам в различных точках среды. При этом в процессе решения приходилось использовать величины, характеризующие поле излучения во всех различных точках среды. Конечно, в работах, в которых применяется ПИ, тоже используются данные о локальных, микроскопических процессах. Но теория, в основном, строится не на интегрировании локальных процессов, а на свойствах инвариантности.

Работы 1941 г., выполненные в Ленинградском университете, как это выяснилось впоследствии, имели некоторых предшественников. В 1862 г. Стокс рассмотрел вопрос об отражении света от совокупности (стопка) рассеивающих пластинок (плоских), способных к отражению и поляризации света. Со свойственной ему глубиной мысли он решил

* С 1982 г. В. В. Соболев действительный член АН СССР.

задачу, о которой мы сейчас сказали бы, что им был применен некий «метод сложения слоев» к дискретной последовательности отражающих и пропускающих слоев.

Прежде чем перейти к сущности ПИ, коротко упомяну о некоторых результатах, которые были получены в довоенные годы. Непосредственно перед войной (1938—1941 гг.), читая студентам Ленинградского университета лекции по теоретической астрофизике, я стремился показать, что к проблеме переноса излучения можно подходить по-разному. В частности, можно применять метод сложения двух слоев, который, например, при чистом рассеянии в одномерном случае приводит к функциональному уравнению для определения коэффициента диффузного пропускания — q, слоя оптической толщины — τ

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{q(\tau_1)+q(\tau_2)-q(\tau_1)q(\tau_2)}. \qquad (1)$$

Решение этого уравнения есть:

$$q(\tau)=\frac{1}{1+a\tau}. \qquad (2)$$

Здесь a—пока неопределенная постоянная.

Повторяю, что для вывода был применен только ПИ. Если спрашивать о допущениях, то сделано естественное для задачи переноса излучения предположение, что перенос совершается в виде двух потоков излучения (вверх и вниз). Правда, при этом появилась одна неопределенная постоянная. При таком подходе все равно, откуда мы будем определять «a»—из опыта или из соображений о локальных процессах. Укажем только, что при изотропном рассеянии $a=\frac{1}{2}$.

Конечно, данная проблема может быть сведена и к простому дифференциальному уравнению, но метод сложения слоев мне казался многообещающим. Значительно позже об этом подходе мною была опубликована статья, в которой указанная одномерная задача была решена в более общем случае, когда наряду с рассеянием происходит также и истинное поглощение [1, 2]*.

В этом случае, когда мы отказываемся от гипотезы чистого рассеяния, но среда продолжает считаться однородной, нам следует найти параметры r и q, причем

$$r\leqslant 1-q,$$

где r —коэффициент диффузного отражения. Получается уже система двух функциональных уравнений для величин r и q

* Цитирование трудов В. А. Амбарцумяна добавлено редакцией.

$$q(\tau_1+\tau_2)=\frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}\,, \tag{3}$$

$$r(\tau_1+\tau_2)=\frac{q^2(\tau_2)r(\tau_1)}{1-r(\tau_1)r(\tau_2)}+r(\tau_2), \tag{4}$$

(общее решение содержит две неопределенные постоянные: одна из них—индикатриса, другая—вероятность сохранения кванта при рассеянии).

Опять прошу обратить внимание: все сделано лишь на основе ПИ (без привлечения уравнения переноса излучения), в данном случае выступающего как некий способ сложения слоев. Он же диктует, сколько должно быть произвольных постоянных, тех самых, которые при локальном рассмотрении кладутся в основу расчетов.

Можно подумать, что в трехмерном случае плоскопараллельных слоев положение другое. Дело в том, что в этом случае для построения системы функциональных уравнений нужно учитывать угловую зависимость величин и знать индикатрису рассеяния как функцию от угла рассеяния. Если мы знаем ее, то легко можем построить систему соответствующих функциональных уравнений [3, 4].

Рассмотрим задачу, индикатриса рассеяния в которой будет фигурировать как входящая в общее решение произвольная функция, подлежащая определению либо из опыта, либо на основе изучения характера элементарных (локальных) процессов рассеяния. Возьмем схему. Пусть на слой падает излучение интенсивности I_0. Интенсивности пропущенного и отраженного слоем излучения обозначим I_q и I_r соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} I_q&=Q(\tau)I_0,\\ I_r&=R(\tau)I_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $Q(\tau)$ и $R(\tau)$—уже операторы, поскольку I_0, I_q и I_r есть функции, характеризующие интенсивность в зависимости от направлений. Эти операторы и являются неизвестными. Их следует найти по тому же методу сложения слоев конечной толщины.

Получается система двух уравнений в линейных операторах, абсолютно аналогичная приведенной системе двух функциональных уравнений для одномерного случая

$$\begin{aligned} Q(\tau_1+\tau_2)&=Q(\tau_1)\{E-R(\tau_2)R(\tau_1)\}^{-1}Q(\tau_2),\\ R(\tau_1+\tau_2)&=Q(\tau_2)R(\tau_1)\{E-R(\tau_2)R(\tau_1)\}^{-1}Q(\tau_2)+R(\tau_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Именно эти уравнения должны дать общее решение задачи, куда индикатриса должна входить как произвольная функция.

Если это все верно, то получается, что при настоящем подходе с позиций ПИ все параметры и функции, характеризующие элементарные процессы, играют роль произвольных параметров, входящих в общее решение.

В упомянутом выше докладе (Елабуга, осень 1941 г.) метод сложения слоев уже был применен к трехмерной задаче, когда элементарный акт рассеяния является изотропным и на плоскопараллельную среду бесконечной (или конечной) толщины падает параллельный пучок излучения и нужно вычислить коэффициент диффузного отражения (и коэффициент диффузного пропускания). Здесь важным шагом явился вывод о том, что в случае сферической индикатрисы рассеяния коэффициент диффузного отражения от полубесконечной атмосферы имеет вид

$$R(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \zeta \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta+\zeta}, \tag{7}$$

где функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\eta+\zeta}, \tag{8}$$

здесь η—косинус угла, λ—вероятность выживания кванта при однократном рассеянии [5, 6, 3].

Наш вывод [5, 3] был основан на том положении, что если к поверхности рассеивающего и поглощающего слоя бесконечной оптической толщины прибавить слой с толщиной $\Delta\tau$ (в котором значение параметра λ то же, что и в бесконечном слое), то интенсивность диффузно отраженного изучения не должна измениться. Это положение нами было тогда названо ПИ. Очевидно, что прибавление слоя $\Delta\tau$ ведет к появлению дополнительных актов рассеяния и поглощения в этом слое, суммарный эффект которых, согласно этому принципу, должен быть нулевым. С другой стороны, оказывается, что все эти дополнительные количества излучаемой и поглощаемой энергии выражаются через величины, характеризующие положение дел на границе слоя. Иными словами, приравнивая их сумму нулю, мы получаем некоторое уравнение, связывающее диффузно отраженное и падающее излучения. Именно отсюда и получается выражение (7) для коэффициента отражения, куда входит вспомогательная функция $\varphi(\eta)$, удовлетворяющая уравнению (8).

Совершенно ясно, что в данном случае ПИ эквивалентен методу сложения слоев. При этом в результате сложения, в рассматриваемом частном случае, не происходит изменения интегральных свойств среды. Однако никто не мешает нам рассматривать и более общие случаи, когда прибавление может привести к их изменениям. Именно такое рассмотрение является одним из возможных способов решения задачи для слоя конечной оптической толщины. В советской литературе обычно и такой подход называют применением ПИ. В иностранной же литературе такой, более общий, подход стал в дальнейшем называться принципом инвариантного вложения (Беллман и сотр.).

В течение 1942 г. были выполнены работы, которые давали решение задачи для среды конечной оптической толщины [5]. В этом случае ПИ был применен в другой форме. Очевидно, что интегральные свойства среды конечной оптической толщины, относящиеся к диффузному отражению и диффузному пропусканию, не должны изменяться, если к среде прибавить с одной стороны слой толщины $\Delta\tau$, а с другой—вычесть слой такой же толщины. И в этом случае все дополнительные количества излучаемой и поглощаемой энергии должны давать в сумме нулевой результат как для одного, так и другого процессов. Поэтому здесь в предположении изотропии элементарного акта мы получаем систему, состоящую из двух уравнений с двумя неизвестными функциями: коэффициента диффузного рассеяния r (η, ζ) и коэффициента диффузного пропускания q (η, ζ), которые в случае сферической индикатрисы рассеяния выражаются через две вспомогательные функции $\varphi(\tau,\eta)$ и $\psi(\tau,\eta)$, удовлетворяющие системе двух функциональных уравнений, являющихся обобщением уравнения (8).

Далее в том же году нам удалось обобщить все эти результаты на случай любой индикатрисы рассеяния [3, 4]. При этом большую роль сыграло то обстоятельство, что нами было использовано разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, введенное еще в одной из наших довоенных работ [7, 8].

В результате появления ПИ, проф. Чандрасекаром, проф. Соболевым и многими другими исследователями, было достигнуто много различных ценных результатов. О некоторых из них мы услышим в докладах на этой конференции.

О некоторых применениях ПИ. Все, что было сказано выше, относится к линейной задаче рассеяния света. Такой же линейный характер носят и некоторые другие задачи, в которых успешно применяется ПИ. Здесь я могу упомянуть, например, рассмотренную мною, а затем Чандрасекаром и Мюнчем, теорию флуктуации света вдоль Млечного Пути при наличии однородного слоя поглощающих облаков [9—11].

Однако следует иметь в виду, что линейный характер задачи является идеализацией физических условий при переносе излучения.

В самом деле, излучение всегда влияет на состояние среды. Если даже мы возьмем самый простой пример среды, состоящей из двухуровенных атомов, мы убедимся, что наличие излучения вызывает накопление атомов в возбужденном состоянии и делает среду более прозрачной.

Были сделаны попытки применения ПИ и к нелинейному случаю. Однако здесь удалось найти решение лишь для очень частных задач [12, 13].

Существенно нелинейными являются задачи, относящиеся к средам, состоящим из многоуровенных атомов, когда нас интересует излучение не в частоте резонансной линии, а скажем, интенсивности в субординатных сериях. Здесь уже даже для приближенного сведения проблемы к линейной задаче в каждом случае встречаются огромные трудности.

ПИ как один из способов решения задач математической физики нашел первые и притом весьма обширные применения в вопросах теории многократного рассеяния света в мутных средах. При переходе от самых элементарных задач (монохроматическое и изотропное рассеяния в плоскопараллельных слоях) к более сложным, в смысле физики элементарных процессов и геометрии среды, случаям наблюдалось следующее: когда усложнялась физика элементарных процессов, например, при переходе от изотропного рассеяния к анизотропному, от чисто монохроматического рассеяния к перераспределению энергии внутри спектральной линии, применение ПИ давало еще больше выгод, чем в элементарном случае. Усложнения геометрического характера (например, отказ от предположения о плоскопараллельности слоев), наоборот, приводили к большим трудностям. Однако задачи со сложной геометрией вообще являются трудным делом и их решение, по-видимому, целесообразнее делить на этапы. Как будет показано в одном из докладов от нашей обсерватории, можно предложить такой подход, основанный на применении ПИ, который, в определенных этапах решения, может иметь решающее значение в задачах с весьма общей геометрией.

Кроме указанных направлений обобщения теории переноса излучения упомянем здесь еще три, в которых, по нашему мнению, ПИ выступает или может выступить с большим успехом.

1) Перенос излучения в стохастических средах. Частным случаем такой задачи и явилось упомянутое выше рассмотрение бесконечной среды, состоящей из поглощающих облаков, распределенных по Пуассону, результатом которой стала теория флуктуаций яркости в поясе Млечного Пути.

2) Проблема переноса излучения в частотах разных линий задан-

ного атома с учетом перераспределения энергии между линиями. Эта задача, как указывалось, существенно нелинейная, особенно в отношении полей излучения в субординатных сериях. Задача еще более усложняется, если учитывать конечную ширину каждой линии. В этом последнем случае уяснение даже элементарных процессов преобразования квантов является сложной задачей. И хотя решение таких задач может иметь самое широкое применение, до сих пор здесь сделаны лишь первые шаги. Тем не менее, нам кажется, что дальнейшее существенное продвижение возможно, главным образом, с помощью ПИ. Конечно, можно добиваться решения задач для отдельных частных случаев и чисто машинными методами. В качестве же аналитического решения рассмотрим лишь один простой пример.

Большой задачей расчетного характера, стоящей перед астрофизикой, является проблема рассеяния света средой, в которой атомы могут находиться более чем в двух состояниях. Монохроматическое рассеяние—неплохое приближение для резонансных линий атомов. Представляется нам, что общее решение задачи должно состоять из двух этапов:

а) Слабые поля, когда процессы поглощения в субординатных сериях не играют большой роли.

б) Поля больших плотностей.

Пример первой задачи—газовые туманности, для которых задача переноса при трех состояниях рассмотрена в одномерном приближении.

Оказывается, что с помощью ПИ можно рассмотреть и трехмерную задачу прямого и флуоресцентного рассеяния.

В этом случае мы имеем дело с двумя частотами ν_{12} и ν_{13} (в случае водорода L_α, L_β или L_0, L_c).

Интересно, что в одном случае эта последняя задача решается настолько легко, что решение нетрудно здесь полностью изложить.

Пусть $1-\lambda$ есть вероятность превращения $\nu_{13} \rightarrow \nu_{12}$ при каждом акте рассеяния кванта ν_{13}. Приведем решение для того частного случая, когда коэффициенты поглощения в обеих линиях ν_{12} и ν_{13} равны. Выражая интенсивности в числах квантов, содержащихся в потоках, можем утверждать, что по отношению к суммарному полю в частотах ν_{12} и ν_{13} будут происходить лишь процессы чистого рассеяния, поскольку переходы $2 \rightarrow 3$ не играют существенной роли из-за слабости поля ν_{23}. Ставится задача о диффузном отражении в частоте ν_{12} и флуоресцентно диффузном в ν_{13} при падении на полубесконечную среду излучения интенсивности Q_{12} на частоте ν_{12} и Q_{13} на частоте ν_{13}. Для построения, таким образом, суммарной интенсивности диффузно отраженного света, включая и флуоресцентное диффузное отражение, будем иметь

$$I_{12+13} = \frac{\pi}{4} Q_{12+13} \frac{\eta\varphi_1(\eta)\varphi_1(\zeta)}{\eta+\zeta}, \tag{9}$$

где

$$\varphi_1(\eta)=1+\frac{1}{2}\eta\varphi_1(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1(\zeta)d\zeta}{\eta+\zeta}, \tag{10}$$

а величина $Q_{12+13}=Q_{12}+Q_{13}$.

С другой стороны, проследим только поле ν_{13}, где вероятность сохранения кванта в той же частоте при рассеянии равна λ. Для него имеем

$$I_{13} = \frac{\pi}{4} Q_{13}\lambda \frac{\eta\varphi_\lambda(\eta)\varphi_\lambda(\zeta)}{\eta+\zeta}, \tag{11}$$

где φ_λ удовлетворяет известному уравнению

$$\varphi_\lambda(\eta) = 1+\frac{\lambda}{2}\eta\varphi_\lambda(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_\lambda(\zeta)d\zeta}{\eta+\zeta}. \tag{12}$$

Тогда

$$I_{12}= \frac{\pi}{4}\eta \frac{Q_{12+13}\varphi_1(\eta)\varphi_1(\zeta)-Q_{13}\lambda\varphi_\lambda(\eta)\varphi_\lambda(\zeta)}{\eta+\zeta}. \tag{13}$$

Если падающее в ν_{12} излучение имеет интенсивность, равную нулю, то есть $Q_{12}=0$, то будем иметь

$$I_{12}=\frac{\pi}{4}\eta Q_{13} \frac{\varphi_1(\eta)\varphi_1(\zeta)-\lambda\varphi_\lambda(\eta)\varphi_\lambda(\zeta)}{\eta+\zeta}. \tag{14}$$

В частном случае, когда наблюдатель рассматривает с того же направления, откуда падает свет, то есть при $\eta=\zeta$, получится:

$$I_{12}\sim\varphi_1^2(\zeta)-\lambda\varphi_\lambda^2(\zeta). \tag{15}$$

Эта формула, очевидно, дает распределение по диску флуоресцентно рассеянного излучения.

При $\lambda=1/2$ для различных значений ζ в этом случае имеем:

ζ	$\varphi_1^2(\zeta)$	$\varphi_1^2(\zeta)-\frac{1}{2}\varphi_{1/2}^2(\zeta)$
1	1.058	1.109
0.5	0.507	0.551
0.0	0.125	0.156

то есть диск менее контрастен, чем при чистом монохроматическом рассеянии.

3) Задачи, относящиеся к непрерывным спектрам за границами серий спектральных линий атомов. Здесь иногда можно добиться существенных упрощений.

Другая область применения ПИ связана с переходом от поля излучения как поля фотонов к газу, состоящему из частиц. Речь идет об осложнениях, связанных с решением кинетического уравнения теории газов. В частности, для практики важны случаи размножающихся частиц (например, нейтронов), возникающие в теории реакторов.

Нам кажется, что практически необозримое поле применения открывается перед ПИ в некоторых областях математики. Упомяну здесь две области: дифференциальные уравнения и стохастическую геометрию. Этим вопросам будут посвящены специальные сообщения, и мы на них не останавливаемся. Укажем только, что в последнем случае речь идет о роли, которую играет ПИ при доказательстве ряда теорем интегральной геометрии.

Мы всегда рассматривали ПИ как **полезный прием** для решения трудных задач математической физики, теоретической астрофизики, ряда разделов математики. И как всякий другой прием он может плодотворно развиваться лишь в тесном взаимодействии с другими приемами и способами решения. Нам кажется, что особенно важно добиться хорошего сочетания этого приема с чисто численными методами машинных вычислений.

Призываю научную молодежь обратить особое внимание на эти возможности.

ON THE PRINCIPLE OF INVARIANCE AND ITS SOME APPLICATIONS

V. A. AMBARTSUMIAN

The brief history of the origin of the principle of invariance and its possible applications is reviewed.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян В. А.** Изв. АН АрмССР, естеств. науки, № 1—2, 31, 1944.
2. **Амбарцумян В. А.** ДАН АрмССР, **7,** № 5, 199, 1947.
3. **Амбарцумян В. А.** ЖЭТФ, **13,** № 9—10, 224, 1943.

4. **Амбарцумян В. А.** ДАН СССР, **43**, № 3, 106, 1944.
5. **Амбарцумян В. А.** ДАН СССР, **38**, № 8, 257, 1943.
6. **Амбарцумян В. А.** Астрон. ж., **19**, № 5, 30, 1942.
7. **Амбарцумян В. А.** Уч. зап. ЛГУ, № 82, сер. матем. наук (астрономия), вып. 11; Труды астрон. обс. ЛГУ **12**, 64, 1941.
8. **Амбарцумян В. А.** Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 97, 1942.
9. **Амбарцумян В. А.** ДАН СССР, **44**, № 6, 244, 1944.
10. **Ambartsumian V. A.** Transactions of IAU, **7**, 452, 1950.
11. **Амбарцумян В. А.** Сообщ. Бюраканской обс., **6**, 1951, 62с.
12. **Амбарцумян В. А.** ДАН АрмССР, **38**, № 4, 225, 1964.
13. **Амбарцумян В. А.** ДАН АрмССР, **39**, № 3, 159, 1964.